Journal of Economics Bibliography
www.kspjournals.org
Volume 2 June 2015 Issue 2

[Robust Control and Model Uncertainty] [*]
Belirsizlik Modelive Sağlamlılık Kontrolü

By Lars Peter HANSEN, & Thomas J. SARGENT

Giriş

Bu çalışma, Itzhak Gilboa ve David Schmeidler (1989)'in maks-min beklenen fayda teorisi ve Evan Anderson ve diğerleri (2000) ve Paul Dupuis ve diğerleri (1998) tarafından önerilen sağlamlık kontrolü uygulamaları arasındaki ilişkiyi tanımlamaktadır.[1]Maks-min beklenen fayda teorisi aşağıdaki şekilde; $\mathbb{Q}$, c ve x için ölçüler bütününü ve δ indirgenme oranını göstermek üzere, c kararları ve x durumlarında tercihlerin sıralanmasında belirsizlikten kaçınmayı ifade eder.

$$\inf_{Q \in \mathbb{Q}} E_Q\left[\int_0^\infty \exp(-\delta t)\, U(c_t, x_t) dt\right] \tag{1}$$

Gilboa ve Schmeidler'in teorisi, belirli uygulamalarda $\mathbb{Q}$'nin nasıl belirleneceğini noktasını açık bırakmıştır.

(1) numaralı denklemdeki kurallar aynı zamanda sağlamlılık kontrolü teorisindeki amaç fonksiyonlarında da ortaya çıkmaktadır. Sağlamlılık kontrol teorisi, $\mathbb{Q}$'yi tek bir yaklaştırma modelialarak, onu istatiksel olarak perturbe etmekte ve $\mathbb{Q}$ pozitif bir penaltı değişkeni olan θ ile sadece örtük şekilde ifade edilmektedir. Bu çalışma, penaltı probleminin aslında yakından ilişkili olduğu kısıt problemine nasıl dönüştürülebileceği hakkındadır. Bu iki formülasyon birbirinden farklılaşmakta; ancak Lagrange çarpan teoremi yoluyla birbiri ile ilişkili olmaktadır. Örtük tercihler sıralaması birbirinden farklılaşmakta ama aynı kararları ifade etmektedir. Tercihlerin her ikisi de tekrarlanmakta ve bu nedenle her ikisi de zamansal tutarlılık göstermektedir. Bununla birlikte, kısıt spesifikasyonu içerisindeki zamansal tutarlılık, gelecek zamanda yeniden düşünülecek olan olasılık sapmalarının nasıl sınırlandırılacağı noktasında yeni bir içsel durum değişkeninin kullanılmasını gerekli kılmaktadır. Anderson ve diğerleri (2000) ve Zengjing Chen ve Larry G. Epstein (2000) çalışmaları ile karşılaştırmaya imkân vermesi açısından, tartışmamızı kesintisiz difüzyon modelleri içerisinde oluşturacağız.

1. Kaynak-Tahsis Problemi Kıyaslaması

[*] Orijinal bilgiler: "Robuts Control and Model Uncertainty", American Economic Review, Vol.91, No.2, pp. 12-17, 2001. Bu makale, 14 Ocak 2015 tarihinde, bizzat T. J. Sargent'in kişisel izni ve AEA Telif Hakları Yetkilisi E. Lee tarafından sağlanan "Çevirisini Yayınlama" hakkındaki kurumsal izne dayanılarak yayınlanmaktadır. (Çeviri: Gülçin Beken, Gümüşhane Üniversitesi, İktisat Bölümü).

[1] Bu çalışma Hansen ve arkadaşları (2004) çalışmasındaki detaylı argümanları özetlemektedir.

İlk olarak; sağlamlılık göz önüne alınmaksızın, indirgenmiş, sonsuz kaynak-tahsisi problemi ortaya konulmaktadır. $\{\beta_t : t \geq 0\}$; temelinde (Ω, F, P) olasılık uzayının bulunduğu, d boyutlu, standart Brown hareketini ifade etsin.$\{F_t : t \geq 0\}$, Brown hareketi tarafından yaratılan filtrasyonun tamamlanması anlamına gelmektedir. Karar alıcının eylemleri, artan biçimde ölçülebilir olan stokastik bir süreç $\{c_t : t \geq 0\}$ ortaya çıkarmaktadır. U anlık bir fayda fonksiyonunu göstermek üzere ve indirgenen amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılarak,

$$\sup_{c \in C} E \left[\int_0^{\infty} \exp(-\delta t) U(c_t, x_t) dt\right]$$

$$dx_t = \mu(c_t, x_t)dt + \sigma(c_t, x_t)dB_t \tag{2}$$

kısıtına tabi olmaktadır. Burada x_0 veri başlangıç koşulu ve C de kabul edilebilir kontrol süreçleri grubudur. P, (2) nolu denklem tarafından yaratılan x_t 'ye ait stokastik süreçleri ifade etmek için kullanılmaktadır. Denklem(2) daha sonraki kesitlerin yaklaştırma modeli olacak ve Ω içerisindeki diğer tüm perturbasyonlardır. μ ve σ kısıtlandırıldığında, C içerisindeki artan yapıdaki herhangi bir ölçülebilir kontrol c, artan şekilde ölçülebilir durum vektör süreci x'i ifade etmektedir. Buradaki varsayım, kontrol probleminin amacının, sağlamlılığa referans verilmeksizin, sonlu bir üst sınıra sahip olduğudur.

2. Model Biçim Hataları

Karar alıcı (2) nolu denklemi, (2) nolu denklemden istatiksel olarak ayırmanın zor olduğu bir dizi alternatif modeli hesaba katarak bir yakınlaştırma olarak kabul eder. Perturbe modeli oluşturmak için, (2) nolu denklemdeki β_t, h artan biçimde ölçülebilir ve $\{\hat{\beta}_t\}$ Brown hareketini ifade ederken; $\hat{\beta} + \int_0^t h_s\, ds$ yerine konulur.Sonrasında sürekli zamanda çarpıkstokastik değişim

$$dx_1 = \mu(c_t, x_t)\mathrm{dt} + \sigma(c_t, x_t)(h_t\, dt + d\widehat{\beta_t})$$

şeklindeki Brown hareket olasılık tanımlaması altında yazılır.

A. Ölçümde Değişim

h süreci, (Ω, F) üzerinde olasılık dağılımı P'yi, P'ye göre mutlak anlamda sürekli olan yeni dağılım Q'ya dönüştürmenin bir aracı olarak kullanılmaktadır. Stokastik bir sürecin ölçümünde mutlak anlamda sürekli bir değişim, negatif olmayan martingaleşeklinde gösterilebilir. Q, P'ye göre mutlak anlamda sürekli bir olasılık dağılımını göstersin. Q ile ilişkili olan beklenti operatörleri ailesi, her bir t için ölçülebilir F değerleri olan tesadüfî değişkenlere uygulanmaktadır. Yani, $E_Q\ g_t = E_p\ g_t\ q_t$ her sınırlı g_t değeri için yazılabilir ki; F_t ölçülebilir ve negatif olmayan tesadüfî değişken q_t için F_t ölçülebilirdir. Tesaüfi değişken q_t, Radon-Nikodym türevi olarak adlandırılır. Bizim modelimizde, q_t 'yi göstermek için kullandığımız Girsanov Teoremine göre;

$$q_t = \exp\left[\int_0^t h_T\,(d\hat{\beta}_T) - \int_0^t \frac{|h_T|^2}{2}\, dt\right]$$

Bu gösterimi, ölçümdeki mutlak anlamda sürekli değişimi parametrelerle ifade etmek adına h'nin kullanımını doğrulamak için kullanmaktayız.[2] h sıfıra eşit olduğunda, kıyaslama kriteri olan kontrol problemine geri dönülmektedir.

B.Stokastik Sürecin Göreli Entropisi

$\{g_t\}$ şeklinde artan biçimde ölçülebilir bir skaler stokastik süreç düşünelim. Bu süreç ürün uzayında bir tesadüfî değişkeni ifade etmektedir. $\mathbb{R}^+$negatif olmayan reel doğru iken $\Omega^* = \Omega\ X\ \mathbb{R}^+$şekillenmekte; $[0, t]$aralığı içerisinde Borel dizileri toplamının β_t olduğu yerde herhangi bir t için en küçük sigma-algebra$F_t \otimes \beta_t$' yi kapsayarak buna karşılık gelen sigma-algebra F^* oluşturulmakta; ve $P^*, \delta \exp(-\delta t)$ yoğunluğu ile üssel dağılırken PxM çarpım ölçüsü olarak şekillenmektedir.

Olasılık ölçüsü kullanılarak bu ifade genişletilmektedir. $Q^* = Q\ \times M$ oluşturulmaktadır. $\{q_t\}$ süreci P'ye göre Q^* için Radon-Nikodym türevidir:

$$E_Q^*(g) = \delta \int_0^\infty \exp(-\delta t)\, E(q_t\ g_{t)dt}.$$

Q^* değerleri, ölçümde mutlak anlamda sürekli bir değişim altında, indirgenmiş beklenen faydanın değerlendirilmesi için kullanılmaktadır.

P ve Q dağılımları arasındaki farklılığı, Q^* ve P^* arasındaki göreli entropi olarak ölçeriz:

$$R(Q) = \delta \int_0^\infty \exp(-\delta t)\, E_Q\, (\log q_{t\ )dt}$$

$$= \int_0^\infty \exp(-\delta_T)\, E_Q \left(\frac{|h_T|^2}{2}\right) dT.$$

Q^*ölçüsünde göreli entropi, dış bükeydir (Bunun için, Dupuis ve Richard S.Ellis, 1997 çalışmasına bakılabilir). Göreli entropi, sadece Q^* ve P^* olasılık dağılımları uyduğunda, negatif olmamakta ve sıfır olmaktadır. h süreci sıfır olduğunda da bu doğrudur.

3. İki Sağlamlılık-Kontrol Problemi

İki sağlamlılık- kontrol problemi arasındaki ilişkiyi incelemekteyiz. $dB_t = d\hat{B}_t + h_t\, dt$ ve$\{\widehat{Bt} : \geq 0\}$P ve Q'ya göre Brown hareketini gösterdiği yerde,E_Q ,stokastik süreç $\{B_t : t \geq 0\}$ 'e göre alınan matematiksel beklentiyi ifade etmektedir. Yani, Q sürüklenme sapması; $\{h_t\}$ nin seçimi ve durum gelişim denkleminin kullanımı ile parametreleştirilmektedir:

$$dx_1 = \mu(c_t, x_t)dt + \sigma\,(c_t, x_t)dB_{t.} \qquad (3)$$

İki kontrol problemi tanımlamaktayız. Çarpan sağlamlılık-kontrol problemi:

$\sup\inf E_Q \left[\int_0^\infty \exp(-\delta t)\, U(c_t, x_t)dt\right] + \theta R(Q)$ (3) numaralı denklem kısıtına tabidir.

c∈ C Q

[2] Mutlak olarak sürekli olmayan perturbasyonlar istatiksel olarak kolaylıkla saptanabilir olduğundan Andersen ve diğerleri (2000) çalışmasında perturbasyonlar üzerine mutlak sürekliliği uygulamıştır.

(3) nolu denkleme ve R(Q) $\leq \eta$ 'ye tabi olan, kısıt sağlamlılık kontrol problemi, $sup_{c\in C} inf_Q E_Q\left[\int_0^\infty \exp(-\delta t)\, U(c_t, x_t) dt\right]$ şeklindedir. R(Q) $\leq \eta$ ifadesinin, h sapmalarına ait tüm yol üzerinde tek zamanlararası kısıt olduğu da hatırlanmalıdır.

Bu iki problem birbiriyle yakından ilişkilidir. Tanımlama hatası kısıtıR(Q) $\leq \eta$ üzerinde örtük Lagrange çarpanı şeklinde sağlamlık parametresi olan θ , ilk problem içerisinde açıklanabilir[3]. θ, çarpan sağlamlılık kontrol problemlerinin ailesini indekslemek için kullanılırken; η ksıt sağlamlılık kontrol problem ailesinin indekslenmesinde kullanılır. θ'nin tüm değerleri kabul edilebilir olmadığından, $-\infty$'dan daha büyük amaç fonksiyonuna ulaşmak için sadece uygun, negatif olmayan θ değerlerini göz önüne aldık. Bu setin kapanması Θ olarak adlandırılabilir. Hansen ve diğerlerinde (2001), varsayımları ve kanıtı takip eden bölümde sunmaktayız.

ÖNERME 1: Varsayalım; $\eta = \eta^*$ için, c^* ve Q^* kısıt sağlamlılık kontrol problemini çözüyor olsun. Çarpan ve kısıt sağlamlılık-kontrol problemlerinin aynı çözüme sahip olduğu, $\theta^* \in \Theta$ şeklinde bir durum bulunmaktadır.

Çarpanı oluşturmak için, J(c, η) ifadesi;

J(c,η) = infE_Q $\left[\int_0^\infty \exp(-\delta t)\, U\,(c_t\ , x_{t)} dt\right]$ koşulunu karşılamakta ve R(Q) $\leq \eta$ ve $J^*(\eta) = sup_{c\in C}$ J(c, η)kısıtınatabi olmaktadır. David G.Luenberger (1969) çalışmasında iddia edildiği gibi, J(c,η) , η 'de azalan ve dışbükeydir. Bu özelliklerin aynısı optimize edilen J^* fonksiyonuna da taşınabilir. η^* veriiken, $\theta^*\eta^*'deJ^*$subgradientin eğimi negatif olsun.(örneğin, θ^*, $\eta^*'deJ^*$'nin tanjantının eğiminin mutlak değeridir)

Hansen ve diğerleri (2001) ayrıca aşağıdaki koşulları da ortaya koymuştur.

ÖNERME 2: J^* tam anlamıyla azalan, θ^* , Θ nin içerisinde ve çarpan sağlamlılık-kontrol problemine c^* ve Q^* çözümü bulunduğu varsayılsın. Yani, c^* aynı zamanda $\eta = \eta^* = R(Q^*)$ için kısıt sağlamlılık-kontrol problemini de çözmektedir.

Önerme 1 ve 2 gözlemsel eşdeğer sonuçlarıdır; çünkü çarpan ve kısıt sağlamlılık-kontrol problemlerinin aynı kararları nasıl ortaya çıkardığını göstermektedir. Hansen ve Sargent (1995) ve Anderson ve diğerleri (2000) çalışmalarındaki kanıtlar kullanıldığında, çarpan sağlamlılık-kontrol probleminin, $-\theta^{-1}$ risk duyarlılık parametresini ifade etmek üzere, tekrarlayan risk-duyarlı kontrol problemi ile aynı çözüme sahip olduğu gösterilmektedir. 1 ve 2 nolu önermeler, risk-duyarlı kontrol problemini, kısıt sağlamlılık-kontrol problemi ile ilişkilendirmektedir.

4. Çarpan formülasyonunda tekrarlılık

$dx_t\ = \mu(c_t, x_t)dt\ + \sigma(c_t, x_t\ )(h_t \mathrm{dt} + d\hat{B}_t)$kısıtına tabi olmak üzere, çarpan sağlamlılık-kontrol problemi;

$sup_c\ inf_h\ \hat{E} \exp(-\delta t) \times \left[U\,((c_t, x_t)\ + \frac{\theta}{2}\,(h_t\,.\,h_t\,)\right] dt$ olarak ifade edilebilir.

h, iki oyunculu sıfır toplamlı bir oyundaki ikinci kontrol süreci olarak görülebilir. h veri iken iken, $\hat{\beta}$ dağılımını çok değişkenli standart Brown hareketi gibi düzeltebiliriz. Sonrasında oyunda sadece tek olasılık dağılımı kalmaktadır ve

[3] Bu bağlantı, lineer ikinci dereceden kontrol problemi bağlamında, enformel biçimde de olsa Hansen ve diğerleri (1999) çalışmasında ve formel biçimde de Hansen ve Sargent (2001) çalışmasında keşfedilmiştir. Biz, I.R.Peterson ve diğerleri (2000) ve David G.Luenberger (1969) çalışmalarındaki argümanları kullandık.

biz de $\hat{E}$ notasyonunu, ilgili beklenti operatörünü tanımlamak için kullanabiliriz. W.H. Fleming ve P.E. Souganidis (1989) çalışmasında bizlere, durum vektörü x_t 'nin fonksiyonları olan her iki oyuncunun (agent) karar kurallarının Markoven iyi oyununda 0-zamanı bağlılığına önerdiği çözümle, Bellman-Isaacs koşulununun tekrarlayan çözümününasıl haklı çıkardığını göstermektedir. Bellman-Isaacs koşulu aşağıdaki gibidir.

VARSAYIM 1: V gibi bir değer fonksiyonu bulunmaktadır:

$$\delta V = \max_{c} \min_{h} U(c,x) + \frac{\theta}{2}(h.h) + [\mu(c,x) + \sigma(c,x)h]\frac{\partial V(x)}{\partial x} + trace\left[\sigma(c,x)'\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x \partial x'}\sigma(c,x)\right]$$

$$= \min_{h} \max_{c} U(c,x) + \frac{\theta}{2}(h.h) + [\mu(c,x) + \sigma(c,x)h]\frac{\partial V(x)}{\partial x} + trace\left[\sigma(c,x)'\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x \partial x'}\sigma(c,x)\right].$$

Bellman-Isaacs koşulu, iki oyunculu sıfır toplamlı bir oyunda, her iki oyuncunun da 0 zamanında ya da tekrarlayan şekilde karar verdikleri durum için Bellman denklemini tanımlamaktadır.

5.İki Tercihler Sıralaması

Lagrange çarpan teoremi iki sağlamlılık-kontrol problemini ilişkilendirirken, örtük tercihler sıralaması farklılaşmaktadır. Bununla birlikte, kayıtsızlık eğrileri teğet olduklarında, her iki problemin ortak çözümü ile ilişkili olmaktadırlar.

A.Tercih Sıralaması

İki tercih sıralamasını oluşturabilmek için, içsel durum vektörü s_t varsayıldığında:

$$ds_t = \mu_s\ (s_t, c_t)dt \tag{4}$$

bu diferansiyel eşitlik sadece s_t için veri s_0 ve $\{c_s : 0 \leq s < t\}$ süreci için çözülebilmektedir. Çözümün artan biçimde ölçülebilir süreç $\{s_t : t \geq 0\}$ olduğunu varsaymaktayız. s_t; x_t durum vektörünün içsel değişkeni olarak kabul edilmektedir. s_t davranış süreğenliğine sahip modellerde olduğu gibi zamanla ayrışmayan tercihlerin yapılması için kullanılır. Gerçekleşme fonksiyonu, (s_t, c_t)'de ayrılabilir olan tercih sıralamasını temsil etmek amacıyla kullanılır.

Tercihler sırası; $D_T\ (c, s_T)$ ve $R_T(Q)$ fonksiyonları ve $T \geq 0$ zamanları için tanımlanır. İlk olarak, s_T T zamanında diferansiyel eşitliğindeki (4) başlangıç koşulunu ifade etmek üzere,

$D_T\ (c, s_T)$= $\int_0^{\infty} \exp(-\delta t)\, u(s_{t+T}\, , C_{t+T})$dt tanımlanır. 0 ve T zamanı arasındaki tüketim etkisi durum değişkeni s_T tarafından yakalanmaktadır. Sonrasında, T zaman modeli fark ölçüsünü tanımladığımızda,

$R_T\ (Q) = \delta \int_0^{\infty} \exp(-\delta t) \times E_Q\ (\log q_t\ |F_T) dt$ olmaktadır.

R(Q)’nin yerel gelişimi, başlangıç koşulu $R_0(Q) = R(Q)\ iken; dR_t(Q) = \left[-\frac{|h_t|^2}{2} + \delta\ R_t\ (Q)\right] dt$ eşitliği ile ifade edilebilir. $D_T\ (c, s_T)$ ifadesini; T’deki tercih tanımlamalarını temsil etmek üzere ve $R_t\ (Q)$ ifadesini de kısıt tanımlaması altında tercihlerin temsil edilmesi için kullanıyoruz.

Sabit θ için, T zaman çarpan tercihlerini değerleme fonksiyonunu kullanarak gösteriyoruz:

$\widehat{W}_T$(c;θ) $= \inf E_Q\ \left[D_T\ (c, s_T\ ) \middle| F_T\right] + \theta R_t(Q).$

Negatif olmayan r_T için $F_T\ ölçülebilir$ olmakta ve T zaman kısıt tercihlerini değerleme fonksiyonu içerisinde

$W_t(c; r_T) = \inf \qquad E_Q\left[D_T(c, s_T) \middle| F_T\right].$

şeklinde ifade ediyoruz

$R_T(Q) \leq r_T$

Uygunluk için, 0-zaman versiyonları; $W_0\ (c, r_0\ ) = W(c, \eta\ )$ ve $\widehat{W}_0$ (c, θ)$=$ $\widehat{W}$(c,θ) şeklinde yazılabilmektedir.

Tercihler sıralamasını şu şekilde tanımlamaktayız. Eğer, W(c^*; η) $\geq W(c; \eta)$ ise iki artan şekilde ölçülebilir c ve c^* için, $c^* \geq \eta c$ olmaktadır. İki artan şekilde ölçülebilir c ve c^* için, eğer, $\widehat{W}(c^*\ ; \theta) \geq \widehat{W}(c\ ; \theta)$. ise, $c^*\ \geq \theta c$ olmaktadır. Tercihler sıralamasına ait olan T zaman versiyonlarına yönelik olarak benzer tanımlamalar kullanabiliriz.

Çarpan tercih sıralaması, $\theta > 0$ şartını karşılayacak şekilde riske duyarlı, tekrarlamalı tercihler sıralaması ile örtüşmektedir.

B.Tercih sıralamaları arasındaki ilişki

İki 0-zamanlı tercih sıralaması birbirinden farklıdır. Daha da ötesi, η veri iken, iki tercih sıralamasını uyumlu kılan herhangi bir θ bulunmamaktadır. Bununla birlikte, Lagrange çarpan teoremi bizim için oldukça faydalı olan daha zayıf bir sonucu ortaya çıkarmaktadır. Evrensel olarak tercihler sıralaması farklılaşırken, çözüm c^* den geçen kayıtsızlık eğrileri, optimal kaynak dağılım problemine teğet olmaktadır.

Lagrange çarpan teoremi kullanılarak,

$W(c^*;\ \eta^*) = \max \inf E_Q\ D(c^*) + \theta[R(Q) - \eta^*\ ]$ yazılmakta ve burada θ^*, θ’yı maksimize eden

$$\theta Q$$

değeri göstermektedir ki; bu değerin kati şekilde pozitif olduğu varsayılmıştır. $c^* \geq_{\eta^*}$ c olduğunu varsayalım. Bunu takiben,

$\widehat{W}(c; \theta^*) -\ \theta^*\eta^*\ \leq W(c; \eta^*) \leq W(c^*; \eta^*) = \widehat{W}(c^*; \theta^*) - \theta^*\eta^*$ yazılmaktadır. Yani; $c^*\ \widehat{\geqq}_{\Theta^*}$ c olmaktadır.

1.ve 2. önermelerden elde edilen gözlemsel eşdeğerlik sonuçları c^* tüketim profiline uygulanabilir. Bu noktada, kayıtsızlık eğrileri teğet olmakta ve bu da aynı fiyatlar tarafından desteklendiklerini ifade etmektedir. Ekonometri uzmanları tarafından yapılan gözlemsel eşdeğerlik iddiaları genellikle denge yörüngesini işaret etmekte ve tercih sıralamasının denge dışı yönünü göz önüne almamaktadır.

6. Tercih sıralamasının tekrarlılığı

Zaman tutarlılığını çalışmak için, tercih sıralamasını tanımlayan 0-zamanı ve T zamanı>0 değerleme fonksiyonu arasındaki ilişkiyi tanımlarız. T zamanında, bazı bilgiler realize edilmiştir ve biraz tüketim yapılmıştır. Bizim tercih sıralamamız, mevcut bilgiye göre realize edilebilir durumda sonradan gelen tüketim hakkında karar alıcının dikkatine odaklanmıştır. Bu değerlendirme, $W_T(c,\theta)$ ve $\widehat{W}_T$ (c, r_T)'nin betimlenmesi için D_T veR_T'yi kullanmamızın temelinde yer alan nedendir. D_T fonksiyonu zaman geçtikçe bakış açısında görülen değişimi yansıtmaktadır. s_T hariç, D_T fonksiyonu sadece T zamanından ilerisine olan tüketim sürecine bağlı olmaktadır.

Buna ek olarak, T zamanında karar alıcı T zamanından ilerisine realize edilebilecek durumlar üzerine odaklanmaktadır. Durum ortalaması olarak kullanılan beklentiler, T zamanındaki bilgi üzerine koşullanmıştır. Bu bağlamda, T zamanındaki bilgi koşullandırılırken sadece 0-zamanındaki göreli entropiyi kullanarak, olasılıkların kısıtlanması uygun olmayacaktır. T zamanında 0-zamanı görelientropikısıtının uygulanması, minimizasyon amaçlı oyuncunun, çoktan ortaya çıkmış zaman ve durumlarda T zamanında realize edilemeyecek herhangi bir olasılık sapması olmadan kaymasına izin vererek, zamansal tutarsızlığı ortaya çıkaracaktır. Bunun yerine, T zamanında karar alıcının, sadece T zamanından öteye tercihlerini değiştiren olasılık sapmalarını keşfetmesine izin veririz. Bu bize, göreli entropi ölçümüzün koşullu emsali R_T'yi kullanma imkânı verir.

Entropi ölçümüz tekrarlamalı bir yapıya sahiptir. 0-zamanında göreli entropi, kolaylıkla gelecek dönemlerdeki koşullu göreli entropilerden oluşturulabilir. Bu durumda;

$$R(Q) = E_Q\left[\int_0^T \exp(-\delta t)\frac{|h_t|^2}{2}dt + \exp(-\delta_T)R_T(Q)\right] \tag{5}$$

yazabiliriz.

Çarpan tercihinin bu tekrarlamalı yapısı, bu gösterimden izlenebilir. 0 zaman değerleme fonksiyonu $\widehat{W}$, T ayrık zamanındaki olaylar ile ayrılabilir ve aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\widehat{W}(c;\theta) = \inf \hat{E}\left(\int_0^T \exp(-\delta t) \times \left[U(c_t, s_t) + \theta\frac{|h_t|^2}{2}\right]dt + \widehat{W_T}(c;\theta)\right)$$

$$dB_t = d\hat{B}_t + h_t\,dt \tag{6}$$

$$ds_t = \mu_s(s_t, c_t)dt. \tag{7}$$

kısıtına tabidir.

T zamanındaki kısıt tercihleri karar alıcının, T zamanından sonrasına olasılık dağılımındaki değişiklikleri fark etmesini sağlar. Daha önceki zamanlarda bilinen olayların ve ortaya çıkmadığı bilinen olayların olasılıklarındaki değişim olasılığını dışarda tutmak istiyoruz(exclude). 0 zamanındaki kısıt tercihleri için, c veri iken, $W(c,\eta)$ oluşturmak için $\tilde{h}$ sürecini bulabiliriz. Bu $\tilde{h}$ süreci ile ilişkili olarak, T zamanındaki koşullu göreli entropiyi $R_T(\tilde{Q})$ hesaplayabiliriz. Yani, değer fonksiyonun $W(c,\eta)$ oluşturulmasında örtük olan, (5) nolu denklemdeki durum ve zaman boyunca göreli entropinin parçalanmasıdır. T zamanında karar alıcının, gelecekte realize edilebilecek sadece çıktıları etkileyen tutumlardaki değişimleri keşfetmesini isteriz. Bu, $0 \leq t \leq T$ için sabitlenen $\tilde{h}_t$ yanında, $r_T = R_T(\tilde{Q})$ için $R_T(Q) \leq r_T$ kısıtının uygulanmasıdır. Dikkat edilmesi gereken, bu kısıtın uygulanmasıyla R(Q)$\leq R(\tilde{Q})$, 0 zamandaki göreli entropikısıtını karşılamaya devam etmiş olduğumuzdur. Böylece, T zamanında karar alıcının, T zamanında realize edilen durumlar arasındaki koşullu göreli entropiyi miras almasının önüne geçmiş oluyoruz. (Chen ve Epstein(2000), her durum ve zamanda h için ayrı kısıtlar uygulayarak bu durumdan kaçınabilmiştir.) Tekrarlamalı kısıt problemi için değer fonksiyonu şu şekilde yazılabilir.

$W(c,\eta) = \inf \widehat{E} \int_0^T \exp(-\delta t)\, U(c_t, s_t)\mathrm{dt} + \hat{E} W_T(c, r_T)$ (6) ve (7) nolukısıt fonksiyonuna tabidir ve $r_T \geq 0 r_T$, $0 \leq t < T$ için ilk koşul $r_0 = \eta$ ile $dr_t = (\delta r_t$-$|h_t|^2$/2)dt çözülür.

7. Sonuç Tespitleri

Finans ve makroekonomideki ampirik çalışmalar genellikle tek ve belirgin şekilde tanımlanmış dinamik istatiksel modelleri varsaymaktadır. Gilboa ve Schmeidler'in (1989) çoklu model beklenen fayda teorisini kullanmak adına, oldukça zengin alternatif dinamiklerle bir dizi tutumlu (tek bileşenli/parametreli) alternatif modeller için sağlamlılık-kontrol teorisine başvurulmuştur. Bu alternatif modeller, karar alıcının yaklaştırma modelini perturbe ederek, ortaya çıkan şokların durum değişkenler üzerindeki rasgele geri bildirimlerine olanak vermektedir. Bu durum yaklaştırma modelinin işlevsel şeklini, şokların ve dışsal değişkenlerin sıralı korelasyonlarını kaçırmasına ve bu dışsal değişkenlerin içsel durum değişkenlerini nasıl etkilediğini görmeye olanak vermektedir. Anderson ve arkadaşları (2000), sağlamlılık-kontrol problemlerindeki çoklu parametrenin T zaman serili gözlemlere ait veri örnekteki yaklaştırma modelinden istatiksel olarak ayırmanın zor olduğu bir dizi pertürbasyonproblemini nasıl endekslediğini göstermektedir.

Kaynakça

Anderson, Evan; Hansen, Lars Peter and Sargent, Thomas. "Robustness, Detection and the Price of Risk." Mimeo, University of Chicago, March 2000.

Chen, Zengjing and Epstein, Larry G. "Ambiguity, Risk and Asset Returns in Continuous Time." Mimeo, University of Rochester, 2000.

Duffie, Darrell and Epstein, Larry G. "Stochastic Differential Utility." *Econometrica*, March 1992, *60*(2), pp. 353–94.

Dupuis, Paul and Ellis, Richard S. *A weak convergence approach to the theory of large deviations*, Wiley Series in Probability and Statistics. New York: Wiley, 1997.

Dupuis, Paul; James, Matthew R. and Petersen, Ian. "Robust Properties of Risk Sensitive Control." Discussion Paper No. LCDS 98-15, Brown University, 1998.

Epstein, Larry G. and Zin, Stanley E. "Substitution, Risk Aversion and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework." *Econometrica*, July 1989, *57*(4), pp. 937–69.

Fleming, W. H. and Souganidis, P. E. "On the Existence of Value Functions of Two-Player, Zero Sum Stochastic Differential Games." *Indiana University Mathematics Journal*, Summer 1989, *38*(2), pp. 293–314.

Gilboa, Itzhak and Schmeidler, David. "Maxmin Expected Utility with Non-Unique Prior." *Journal of Mathematical Economics*, 1989, *18*(2), pp. 141–53.

Hansen, Lars Peter and Sargent, Thomas. "Discounted Linear Exponential Quadratic Gaussian Control." *IEEE Transactions on Automatic Control*, May 1995, *40*(5), pp. 968–71.

--------------. *Elements of robust control and filtering for macroeconomics*. Unpublished manuscript, University of Chicago, 2001.

Hansen, Lars Peter; Sargent, Thomas and Tallarini, Thomas. "Robust Permanent Income and Pricing." *Review of Economic Studies*, October 1999, *66*(4), pp. 873–907.

Hansen, L. P.; Sargent, T. J.; Turmuhambetova, G. A. and Williams, N. "Robust Control and Model Uncertainty." Mimeo, University of Chicago, 2001.

Luenberger, David G. *Optimization by vector space methods*. New York: Wiley, 1969.

Peterson, I. R.; James, M. R. and Dupuis, P. "Minimax Optimal Control of Stochastic Uncertain Systems with Relative Entropy Constraints." *IEEE Transactions on Automatic Control*, March 2000, *45*(3), pp. 398 – 412.